Examen blanc de Mathématiques
2ème année Baccalauréat - Sciences PC et SVT

Réalisé par Youssef SEMHI

Contact : 0644127117/0708875223

Exercice 1

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les points :

$$A(1;1;0), \quad B(0;2;0), \quad C(0;0;3)$$

1. Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, puis en déduire que $3x + 3y + 2z - 6 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Calculer $\dfrac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|}$ puis en déduire la distance du point B à la droite (AC).

3. Soit (D) la droite passant par C et de vecteur directeur $\vec{u}(1;1;-3)$.
Montrer que (D) est perpendiculaire à (AB).

4. Soient :

(P) le plan d'équation $2x + y - 2z + 1 = 0$

(S_α) la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y + \frac{5}{4} - \alpha = 0$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

a) Déterminer le rayon de (S_α) et les coordonnées de son centre Ω en fonction de α.

b) Trouver α pour que (P) soit tangent à (S_α).

c) Déterminer le point de contact entre (S_α) et (P).

Exercice 2

Partie I

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{2}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{2u_n + 1} \end{cases} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

1. Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : \dfrac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

2. a) Montrer que :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(1 - 2u_n)}{2u_n + 1}$$

puis déduire que $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

b) Déduire que $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1 - u_{n+1} \leq \frac{6}{7}(1 - u_n)$$

(Remarquer que $u_n \geq \frac{2}{3}$)
Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1 - u_n \leq \frac{1}{3}\left(\frac{6}{7}\right)^n$$

puis déduire la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$.

Partie II

On considère la suite numérique (v_n) définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$$

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$.

2. Écrire v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 3

1. Étude du polynôme complexe

a) Vérifier que $z = 2$ est solution de $P(z) = 0$ où :

$$P(z) = z^3 - 2(\sqrt{2} + 1)z^2 + 4(1 + \sqrt{2})z - 8$$

b) Déterminer α et β tels que :

$$P(z) = (z - 2)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

c) Avec $\alpha = -2\sqrt{2}$ et $\beta = 4$, résoudre $P(z) = 0$.

2. Géométrie dans le plan complexe

a) Montrer que $\frac{d - a}{b - a} = i$, puis déduire la nature du triangle ABD.
Affixes : $a = 2$, $b = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $d = 2 - \sqrt{2} + i(\sqrt{2} - 2)$

b) Écrire b sous forme trigonométrique.

c) Montrer que :

$$1 + e^{\frac{i\pi}{4}} = \left(e^{-\frac{i\pi}{6}} + e^{\frac{i\pi}{8}}\right) e^{\frac{i\pi}{8}}$$

puis déduire que :

$$c = 4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{\frac{i\pi}{8}}$$

d) Écrire c sous forme algébrique, puis montrer que :

$$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$$

3. **Transformations géométriques**
   a) Montrer que C est l'image de A par la translation de vecteur OB.

$$c = 2\left(e^{i2\pi} + e^{\frac{i\pi}{4}}\right)$$

   b) Démontrer que OACB est un losange.
4. Vérifier que D est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
5. Déterminer l'ensemble des points M(z) vérifiant :

$$|z - d| = a$$

Exercice 4

Un sac contient 8 boules indiscernables au toucher :

3 boules rouges numérotées 0, 1, 1

3 boules vertes numérotées 0, 1, 2

2 boules blanches numérotées 0, 1

On tire simultanément 3 boules du sac.

1. Soient les événements :
   A : "Obtenir trois boules de couleurs différentes"
   B : "Obtenir trois boules portant le numéro 0"
   a) Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$, puis en déduire $P(A \cup B)$.
   b) Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier.
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules portant le numéro 1 parmi les trois boules tirées.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Calculer l'espérance mathématique de X.

PROBLEM

Partie I

Soit g une fonction définie sur $I =]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x^2 \ln x - 2x - 1}{x^2}$$

1. Calculer $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \to 0^+} g(x)$.
2. Montrer que $\forall x \in I$, $g'(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$, puis dresser le tableau de variations de g.
3. a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur I, et que :

$$\frac{51}{20} < \alpha < \frac{64}{20}$$

   b) Montrer que :
   $g(x) > 0$ pour tout $x \in]\alpha; +\infty[$
   $g(x) < 0$ pour tout $x \in]0; \alpha]$

Partie II

Soit f une fonction définie sur $I =]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1 - x\ln x}{xe^x}$$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat.

2. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et interpréter géométriquement le résultat.

3. Vérifier que :

$$\ln(\alpha) = \frac{2\alpha+1}{\alpha^2}$$

$$f(\alpha) = -\frac{1+\alpha}{\alpha^2}e^{-\alpha}$$

4. a) Montrer que $\forall x \in I,\ f'(x) = e^{-x}g(x)$.

b) Déduire les variations de f sur I et dresser son tableau de variations.

5. Écrire l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 1.

6. Construire la courbe (C_f).

7. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda > 3$.

a) Montrer que $H : x \mapsto e^{-x}\ln x$ est une primitive de f sur I.

b) Calculer l'aire du domaine limité par (C_f), l'axe des abscisses et les droites $x = 3$ et $x = \lambda$.

c) Calculer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

8. On considère la fonction h la restriction de f à $]\alpha,+\infty[$

a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Dresser le tableau de variations de h^{-1} sur J.

c) Calculer $f(1)$ puis montrer que f^{-1} est dérivable en $\frac{1}{e}$.

d) Montrer que $(f^{-1})'\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{-e}{3}$.

Correction

Corrige exercice 1 :

1)

:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 2-1 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0-1 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}\,(1\times3-0\times(-1)) - \vec{j}\,(-1\times3-0\times(-1)) + \vec{k}\,(-1\times(-1)-(-1\times1))$$

$$= 3\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k} = \boxed{3\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}}$$

Équation du plan (ABC) : Le vecteur normal est $\vec{n} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$. En utilisant le point A(1,1,0) :

$$3(x-1) + 3(y-1) + 2(z-0) = 0 \Rightarrow \boxed{3x + 3y + 2z - 6 = 0}$$

2)

$$d(B, AC) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{\sqrt{3^2 + 3^2 + 2^2}}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{22}}{\sqrt{11}} = \sqrt{\frac{22}{11}} = \boxed{\sqrt{2}}$$

3)

La droite (D) passe par C(0,0,3) et a pour vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Vecteur directeur de (AB) : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Produit scalaire :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = (-1) \times 1 + 1 \times 1 + 0 \times (-3) = -1 + 1 + 0 = 0$$

Donc $\boxed{(D) \perp (AB)}$.

4)

a) **Centre et rayon de la sphère** :

$$x^2 - x + y^2 - 2y + z^2 = \alpha - \frac{5}{4}$$

Mise sous forme canonique :

$$\begin{aligned} x^2 - x + y^2 - 2y + z^2 &= \alpha - \frac{5}{4} \\ \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + (y^2 - 2y + 1) + z^2 &= \alpha - \frac{5}{4} + \frac{1}{4} + 1 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + z^2 &= \alpha \end{aligned}$$

Centre : $\boxed{\Omega\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)}$, Rayon : $\boxed{\sqrt{\alpha}}$

b) Distance de Ω à (P) :

$$d = \frac{|2 \times \frac{1}{2} + 1 - 2 \times 0 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{3}{3} = 1$$

Condition de tangence : $d = R \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$

c) Droite normale passant par Ω :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -2t \end{cases}$$

Intersection avec (P) :

$$2\left(\frac{1}{2} + 2t\right) + (1+t) - 2(-2t) + 1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{3}$$

Point de contact :

$$\boxed{K\left(-\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)}$$

Corrige exercice 2 :

Partie I :

1. : **Initialisation :** Pour $n = 0$, $u_0 = \dfrac{2}{3}$ vérifie bien $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{2}{3} \leq 1$.

Hérédité : Supposons $\dfrac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ pour un $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$u_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{4u_n - 1}{2u_n + 1} - \frac{1}{2} = \frac{3(2u_n - 1)}{2(2u_n + 1)} \geq 0 \quad (\text{car } u_n \geq \frac{1}{2}),$$
$$u_{n+1} - 1 = \frac{4u_n - 1}{2u_n + 1} - 1 = \frac{2(u_n - 1)}{2u_n + 1} \leq 0 \quad (\text{car } u_n \leq 1).$$

Ainsi, $\dfrac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{2} \leq u_n \leq 1}$

2.

a) $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{4u_n - 1}{2u_n + 1} - u_n \\ &= \frac{4u_n - 1 - u_n(2u_n + 1)}{2u_n + 1} \\ &= \frac{4u_n - 1 - 2u_n^2 - u_n}{2u_n + 1} \\ &= \frac{-2u_n^2 + 3u_n - 1}{2u_n + 1} \\ &= \frac{(u_n - 1)(1 - 2u_n)}{2u_n + 1} \end{aligned}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(1 - 2u_n)}{2u_n + 1} \geq 0 \quad (\text{car } u_n \geq \frac{1}{2})$$

$\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$

b) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1, donc convergente.

3.

a) $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$1 - u_{n+1} = \frac{2(1-u_n)}{2u_n+1} \leq \frac{6}{7}(1-u_n) \quad \text{car } u_n \geq \frac{2}{3}$$

$$\boxed{1 - u_{n+1} \leq \frac{6}{7}(1-u_n)}$$

b) D'après la question 3.a, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1 - u_{n+1} \leq \frac{6}{7}(1-u_n)$$

En appliquant cette inégalité de manière itérative :

$$1 - u_n \leq \left(\frac{6}{7}\right)^n (1-u_0)$$

Comme $u_0 = \frac{2}{3}$, alors $1 - u_0 = \frac{1}{3}$. D'où :

$$\boxed{1 - u_n \leq \frac{1}{3}\left(\frac{6}{7}\right)^n}$$

Lorsque $n \to +\infty$, $\left(\frac{6}{7}\right)^n \to 0$, donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$$

Partie II : Étude de la suite (v_n)

1. $\forall n \in \mathbb{N}$ **:**

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{2u_{n+1}-1} = \frac{\frac{4u_n-1}{2u_n+1}-1}{2\times\frac{4u_n-1}{2u_n+1}-1} = \frac{-2u_n+2}{6u_n-3} = \frac{2}{3}\times\frac{u_n-1}{2u_n-1} = \frac{2}{3}v_n$$

$$\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } q = \frac{2}{3}}$$

2. Expression des termes :

$$v_n = v_0\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{u_0-1}{2u_0-1}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \boxed{-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$v_n = \frac{u_n-1}{2u_n-1} \implies u_n = \frac{v_n+1}{2v_n+1}$$

$$u_n = \frac{v_n+1}{2v_n+1} = \boxed{\frac{1-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}}$$

Corrige exercice 3 :

1. Étude du polynôme complexe

a) Vérification que $z = 2$ est solution

On considère le polynôme :

$$P(z) = z^3 - 2(\sqrt{2}+1)z^2 + 4(1+\sqrt{2})z - 8$$

Calculons $P(2)$:

$$\begin{aligned} P(2) &= 8 - 2(\sqrt{2}+1)\times 4 + 4(1+\sqrt{2})\times 2 - 8 \\ &= 8 - 8\sqrt{2} - 8 + 8 + 8\sqrt{2} - 8 \\ &= (8-8+8-8) + (-8\sqrt{2}+8\sqrt{2}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $z = 2$ est bien une racine de $P(z)$.

b) Détermination de α et β

On cherche à factoriser :

$$P(z) = (z-2)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

En développant :

$$\begin{aligned} (z-2)(z^2+\alpha z+\beta) &= z^3 + \alpha z^2 + \beta z - 2z^2 - 2\alpha z - 2\beta \\ &= z^3 + (\alpha - 2)z^2 + (\beta - 2\alpha)z - 2\beta \end{aligned}$$

Par identification avec $P(z)$:

$$\begin{cases} \alpha - 2 = -2(\sqrt{2}+1) \\ \beta - 2\alpha = 4(1+\sqrt{2}) \\ -2\beta = -8 \end{cases}$$

On obtient :

$$\beta = 4, \quad \alpha = -2\sqrt{2}$$

c) Résolution de $P(z) = 0$

Avec $\alpha = -2\sqrt{2}$ et $\beta = 4$, on a :

$$P(z) = (z-2)(z^2 - 2\sqrt{2}z + 4) = 0$$

Les solutions sont :

$z - 2 = 0 \Rightarrow z = 2$

$z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$

Résolvons l'équation quadratique :

$$\Delta = (2\sqrt{2})^2 - 16 = 8 - 16 = -8$$

$$z = \frac{2\sqrt{2} \pm i\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$$

2. Géométrie dans le plan complexe

a) Nature du triangle ABD

Avec $a = 2$, $b = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $d = 2 - \sqrt{2} + i(\sqrt{2} - 2)$.

Calculons $\dfrac{d-a}{b-a}$:

$$d - a = -\sqrt{2} + i(\sqrt{2} - 2)$$
$$b - a = \sqrt{2} - 2 + i\sqrt{2}$$

Simplifions le rapport :

$$\frac{d-a}{b-a} = \frac{-\sqrt{2} + i(\sqrt{2}-2)}{(\sqrt{2}-2) + i\sqrt{2}} = i$$

Ceci montre que :

— $|d - a| = |b - a|$ (même module)

— L'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ est $\pi/2$

Donc le triangle ABD est rectangle isocèle en A.

b) Forme trigonométrique de b

$$b = \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

c) Démonstration de l'égalité

Montrons que :

$$1 + e^{i\pi/4} = \left(e^{-i\pi/8} + e^{i\pi/8}\right) e^{i\pi/8}$$

Développons le membre droit :

$$\left(2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) e^{i\pi/8} = 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{i\pi/8}$$

Or :

$$1 + e^{i\pi/4} = e^{i\pi/8}(e^{-i\pi/8} + e^{i\pi/8}) = 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{i\pi/8}$$

Donc :

$$c = 2(1 + e^{i\pi/4}) = 4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{i\pi/8}$$

d) Forme algébrique et tangente

Forme algébrique de c :

$$c = 4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

Pour $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$:

$$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2} - 1$$

3. Transformations géométriques

a) Translation

On a $c = 2(1+e^{i\pi/4}) = 2+\sqrt{2}+i\sqrt{2} = a+b$. Donc C est bien l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.

b) Losange OACB

Vérifions que :

$|a| = |b| = 2$

$|c-a| = |b| = 2$

$|c-b| = |a| = 2$

Donc OACB est un losange.

4. Rotation

La rotation de centre A d'angle $\pi/2$ transforme B en D :

$$d = a + i(b-a) = 2 + i(\sqrt{2} - 2 + i\sqrt{2}) = 2 - \sqrt{2} + i(\sqrt{2} - 2)$$

Ce qui correspond bien à l'affixe donné de D.

Corrige exercice 4 :

1. a) Calcul de $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$

Nombre total de tirages possibles :

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!5!} = 56$$

Événement A : "Tirer trois boules de couleurs différentes"

$$C_3^1 \times C_3^1 \times C_2^1 = 3 \times 3 \times 2 = 18$$
$$P(A) = \frac{18}{56} = \frac{9}{28}$$

Événement B : "Tirer trois boules numérotées 0"

$$C_3^3 = 1$$
$$P(B) = \frac{1}{56}$$

Événement $A \cap B$: "3 couleurs différentes ET toutes numérotées 0"
Seul cas possible

$$P(A \cap B) = \frac{1}{56}$$

Calcul de $P(A \cup B)$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{9}{28} + \frac{1}{56} - \frac{1}{56} = \frac{9}{28}$$

1. b) Indépendance des événements

Vérifions si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$:

$$\frac{1}{56} \stackrel{?}{=} \frac{9}{28} \times \frac{1}{56} = \frac{9}{1568}$$

$$\frac{1}{56} \neq \frac{9}{1568} \quad \text{donc } A \text{ et } B \text{ ne sont pas indépendants}$$

2.

X = nombre de boules numérotées 1 parmi les 3 boules tirées.

Valeurs possibles

$X \in \{0, 1, 2, 3\}$

Calcul des probabilités

Pour $X = 0$:

$$P(X = 0) = \frac{C_4^3}{56} = \frac{4}{56} = \frac{1}{14}$$

Pour $X = 1$:

$$P(X = 1) = \frac{C_4^1 \times C_4^2}{56} = \frac{4 \times 6}{56} = \frac{3}{7}$$

Pour $X = 2$:

$$P(X = 2) = \frac{C_4^2 \times C_4^1}{56} = \frac{6 \times 4}{56} = \frac{3}{7}$$

Pour $X = 3$:

$$P(X = 3) = \frac{C_4^3}{56} = \frac{4}{56} = \frac{1}{14}$$

Tableau de la loi de probabilité

X	0	1	2	3
$P(X)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

Espérance mathématique

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{14} + 1 \times \frac{3}{7} + 2 \times \frac{3}{7} + 3 \times \frac{1}{14} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Corrige de PROBLEM :

Partie I

1.

a) **Limite en $+\infty$:**

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\ln x - 2x - 1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \ln x - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$$

b) **Limite en 0^+ :**

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\ln x - 2x - 1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^2\ln x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} (-2x-1) = -1$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty}$$

c) **Limite en 0^+ :**

$$g(x) = \frac{x^2\ln x - 2x - 1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^2\ln x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} (-2x-1) = -1$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} g(x)} = -\infty$$

2. Dérivée et tableau de variations

a) Pour tout x de $]0;+\infty[$:

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln x - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \\ g'(x) &= \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} \\ &= \frac{x^2+2x+2}{x^3} \end{aligned}$$

Le dénominateur $x^3 > 0$ sur $I =]0;+\infty[$ et le numérateur x^2+2x+2 a pour discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$, donc est toujours positif.

$$\boxed{g'(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^3} > 0 \quad \forall x \in I}$$

b) **Tableau de variations :**

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
		$\nearrow$	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$		

3. Équation $g(x) = 0$

a)

- g est continue et strictement croissante sur I (car $g' > 0$)
- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
- D'après le TVI, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in I$

Encadrement de α :
Calculons :

$$g\left(\frac{51}{20}\right) = g(2.55) \approx -0.02 < 0$$
$$g\left(\frac{64}{20}\right) = g(3.2) \approx 0.05 > 0$$

$$\boxed{\frac{51}{20} < \alpha < \frac{64}{20}}$$

b) **Signe de g :**
Comme g est strictement croissante avec $g(\alpha) = 0$:

$$\boxed{\begin{array}{ll} g(x) < 0 & \text{pour tout } x \in]0; \alpha[\\ g(x) > 0 & \text{pour tout } x \in]\alpha; +\infty[\end{array}}$$

Partie II

1. Limite en 0^+

$$f(x) = \frac{1 - x\ln x}{xe^x}$$
$$\lim_{x\to 0^+} (1 - x\ln x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} xe^x = 0^+$$
$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty}$$

Asymptote verticale en $x = 0$.

2. Limite en $+\infty$

Par croissance comparée :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x}{e^x} = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

Asymptote horizontale $y = 0$.

3.

— On a :

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 &\Rightarrow \frac{\alpha^2 \ln \alpha - 2\alpha - 1}{\alpha^2} = 0 \\ &\Rightarrow \alpha^2 \ln \alpha = 2\alpha + 1 \\ &\Rightarrow \boxed{\ln \alpha = \frac{2\alpha + 1}{\alpha^2}} \end{aligned}$$

Et on a :

—

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{1 - \alpha \ln \alpha}{\alpha e^\alpha} \\ &= \frac{1 - \alpha\left(\frac{2\alpha+1}{\alpha^2}\right)}{\alpha e^\alpha} \\ &= \frac{-\frac{\alpha+1}{\alpha}}{\alpha e^\alpha} \\ &= \boxed{-\frac{1+\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha}} \end{aligned}$$

4. Dérivée et variations

4.a) Calcul de $f'(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 - x \ln x}{x e^x} \\ f'(x) &= \left(\frac{1}{x e^x}\right)' - \left(\frac{\ln x}{e^x}\right)' \\ &= -\frac{1+x}{x^2 e^x} - \frac{\frac{1}{x} - \ln x}{e^x} \\ &= \frac{x^2 \ln x - 2x - 1}{x^2 e^x} \\ &= \boxed{e^{-x} g(x)} \end{aligned}$$

4.b) Tableau de variations

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	0

5. Tangente en $x = 1$

$$f(1) = \frac{1}{e} \quad , \quad f'(1) = -\frac{3}{e}$$

$$\begin{aligned} (T) : y &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ &= -\frac{3}{e}(x-1) + \frac{1}{e} \\ &= \boxed{-\frac{3}{e}x + \frac{4}{e}} \end{aligned}$$

6.

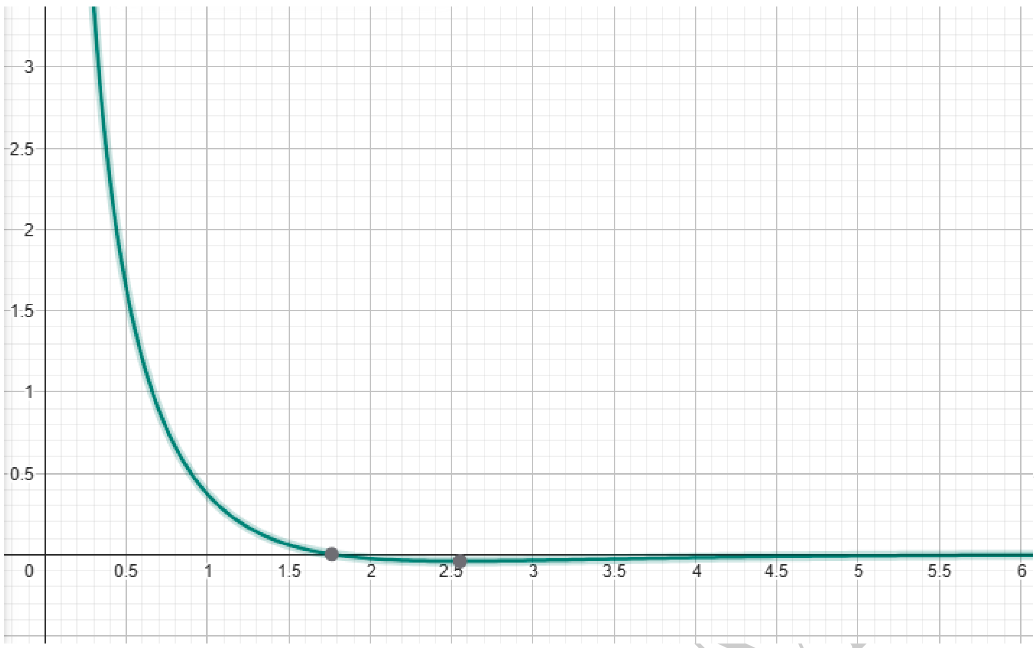

FIGURE 1 – la courbe de la fonction f

7. Calcul d'aire

7.a) On calcule la dérivée de H :

$$\begin{aligned} H'(x) &= \left(e^{-x}\ln x\right)' \\ &= e^{-x}\cdot\frac{1}{x} + (-e^{-x})\cdot\ln x \\ &= e^{-x}\left(\frac{1}{x}-\ln x\right) \\ &= \frac{1-x\ln x}{xe^{x}} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{H'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x\in I}$$

7.b) L'aire $A(\lambda)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \left|\int_3^{\lambda} f(x)\,dx\right| \\ &= -\Big[H(x)\Big]_3^{\lambda} \\ &= -e^{-\lambda}\ln\lambda + e^{-3}\ln 3 \end{aligned}$$

$$\boxed{A(\lambda) = \left(-e^{-\lambda}\ln\lambda + e^{-3}\ln 3\right)\ \text{cm}^2}$$

7.c) Limite de l'aire Calculons la limite quand $\lambda \to +\infty$:

$$\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty} \left(-e^{-\lambda}\ln\lambda + e^{-3}\ln 3\right)$$
$$= -0 + e^{-3}\ln 3 \quad \text{car } e^{-\lambda}\ln\lambda = \frac{\ln\lambda}{e^{\lambda}} = \frac{\ln\lambda}{x}\frac{1}{\frac{e^{\lambda}}{x}} \to 0$$
$$= \frac{\ln 3}{e^3}$$

$$\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) = \frac{\ln 3}{e^3}\ \text{cm}^2}$$

8.

8.a) Existence de la fonction réciproque La fonction h est :

strictement croissante sur $]\alpha, +\infty[$

il est continue sur $]\alpha, +\infty[$

Donc il exist fonction réciproque. Son image est :

$$J = \left]\lim_{x\to\alpha^+} h(x), \lim_{x\to+\infty} h(x)\right[=]h(\alpha), 0[$$

avec $h(\alpha) = -\dfrac{1+\alpha}{\alpha^2}e^{-\alpha}$.

$$\boxed{h^{-1} \text{ existe et est définie sur } J = \left]-\frac{1+\alpha}{\alpha^2}e^{-\alpha}, 0\right[}$$

8.b) Tableau de variations de h^{-1} Comme h est croissante sur $]\alpha, +\infty[$, sa réciproque h^{-1} sera également croissante sur J.

y	$h(\alpha)$		0^-
$h^{-1}(y)$	α	$\nearrow$	$+\infty$

8.c) Dérivabilité de f^{-1} On a :

$$f(1) = \frac{1 - 1\cdot\ln 1}{1\cdot e^1} = \frac{1}{e}$$

Donc $f^{-1}\left(\frac{1}{e}\right) = 1$.

La fonction f est dérivable en 1 avec $f'(1) = -\dfrac{3}{e} \neq 0$, donc f^{-1} est dérivable en $\dfrac{1}{e}$.

8.d) Calcul de la dérivée

$$(f^{-1})'\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{-\frac{3}{e}} = -\frac{e}{3}$$

$$\boxed{(f^{-1})'\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{e}{3}}$$